HASSE WEIL L関数の関数等式の符号(代数的整数論と数論的幾何学)

斎藤, 毅

数理解析研究所講究録
925 巻 1995 年 159-165

HASSE-WEIL L 関数の関数等式の符号

斎藤 毅 (TAKESHI SAITO)

東大. 数理

1. Hasse-Weil L 関数の関数等式の符号.

M を代数体 K上の ($\mathbb{Q}$ 係数の) motive とする. 例えば K上の射影的非特異多様体 Xに対し $M = H^m(X)$ などである. Mは Hodge, de Rham, ℓ進などの実現をもち, Mの Hasse-Weil L 関数

$$L(M,s) = \prod_{v:K \text{ の素点}} P_v(M, Nv^{-s})^{-1}$$

が定義される. Mの ℓ進実現 V_ℓは, 有限個の素点を除けば不分岐な Kの絶対 Galois 群 G_Kの $\mathbb{Q}_\ell$表現であり, 不分岐な vについては $P_v(T) = \det(1 - Fr_vT : V_\ell) \in \mathbb{Q}[T]$ となる. ここで Fr_v は v での Nv-乗写像の逆であり, Nv は v の剰余体の位数である. さらにΓ-因子 $L_\infty(M,s)$ が Hodge 実現を用いて定義され, 完備 L 関数$\Lambda(M,s) = L(M,s) \times L_\infty(M,s)$ は関数等式

$$\Lambda(M,s) = \epsilon(M)(D_K^{\mathrm{rank}\ M} f(M))^{-s}\Lambda(M^*(1), -s)$$

を満たすと予想される. ここで D_K は K の判別式, $\epsilon(M)$ は Mのϵ-因子と呼ばれるある数, $f(M)$ は Mの導手と呼ばれるある自然数である. Mが自己双対で重さが m すなわち $M^* \simeq M(m)$ とすると

$$\epsilon(M) = \pm(D_K^{\mathrm{rank}\ M} f(M))^{\frac{m+1}{2}}$$

となるので, この符号を関数等式の符号と呼び $w(M)$ と書く.

ここでは Mが直交 motive のとき, すなわち上の同型が対称双一次形式 $M \times M \to \mathbf{1}(-m)$ により与えられるときは, $w(M) = +1$ でなければならないということを報告する. 但し L 関数の解析接続等は一般に知られていないため, 符号 $w(M)$ は以下のように積公式で定義されたものを考える.

直交 motive の例は上の $H^m(X)$ で m を偶数とすることにより与えられる. 双一次形式は cup 積と Hard-Lefschetz により定義される. また m を奇数とすると斜交 motive がえられるが, このときは Beilinson-Bloch により次が予想される

$$w(M) = (-1)^{\mathrm{rank}\ CH^{\frac{m+1}{2}}(X)_h}.$$

ここで $CH^{\frac{m+1}{2}}(X)_h$は余次元$\frac{m+1}{2}$の代数サイクルのなす Chow 群の homological に 0 と同値な部分である.

2. motive とϵ-因子, 主結果.

以下では motive というときは, 素数ℓを固定して次のものからなる組を考える. 以下簡単のため $K = \mathbb{Q}$ とする.

(1) De Rham 実現: 有限次 $\mathbb{Q}$-線形空間 Dで, $F^q D = D (q \ll 0), F^q D = 0 (q \gg 0)$ となる減少 filtration が与えられているもの.

(2) Betti 実現: 有限次 $\mathbb{R}$-線形空間 V_∞ で, 複素共役 c の作用が与えられているもの.

(3) ℓ進実現: 有限次 $\mathbb{Q}_\ell$-線形空間 V_ℓで, $\mathbb{Q}$ の絶対 Galois 群 $G_{\mathbb{Q}}$ の連続かつ有限個の素数を除いて不分岐な作用が与えられているもの.

(4) De Rham と Betti の無限素点での比較同型: $\mathbb{C}$-線形同型

$$D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \to V_\infty \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

で,$\mathbb{R}$-Hodge 構造を定義しかつ左辺の複素共役を右辺の対角的な複素共役にうつすもの.

(5) ℓ進と Betti の無限素点での比較: 複素共役 c の固有多項式 $\det(1 - ct : V_\infty)$ と $\det(1 - ct : V_\ell)$ は, ともに $\mathbb{Q}[t]$ にはいるがそこで等しい.

(6) De Rham と ℓ進の素点 ℓでの比較同型: $\mathbb{Q}_\ell$ の絶対 Galois 群 $G_{\mathbb{Q}_\ell}$の作用と filtration を保つ同型

$$D \otimes_{\mathbb{Q}} B_{cris} \to V_\ell \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} B_{cris}.$$

ここで B_{cris}は Fontaine が定義した環である（[Fo] 参照）.

(6) のとき V_ℓは ℓで cristalline であるといい, $D_\ell = D \otimes \mathbb{Q}_\ell$を対応する filter 付き加群という. Xが $\mathbb{Q}$ 上の proper smooth な多様体のとき, $D = H^m_{dR}(X/\mathbb{Q})$ とその Hodge filtration, $V_\infty = H^m_{sing}(X(\mathbb{C}), \mathbb{R})$ $V_\ell = H^m_{etale}(X_{\bar{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_\ell)$ とそれへの $G_{\mathbb{Q}}$の自然な作用とそれらの比較同型は上のような性質をもつ. (6) の同型は [Fo-M] による. さらに各素数 $p \neq \ell$ に対し,V_ℓへの $G_{\mathbb{Q}_p}$ の準巾単な表現で定まる Weil-Deligne 群の表現が $\mathbb{Q}$-有理的と仮定する. 素数 $p = \ell$については, (6) により定まる D_ℓ上の frobenius f_ℓの固有多項式

$$P_v(t) = \det(1 - f_\ell t : D_\ell) \in \mathbb{Q}_\ell[t]$$

が $\mathbb{Q}$-係数であると仮定する.

局所ϵ-因子の理論 [D1] により, 各有限素点での Weil-Deligne 群の表現及び無限素点での Hodge 構造に対し, 局所ϵ-因子

$$\epsilon_v(M, \psi_v, \mu_v) \in \mathbb{C}^\times$$

が定義される. ここで$\psi_v : \mathbb{Q}_v \to \mathbb{C}^\times$は局所体 $\mathbb{Q}_v$ の加法群の非自明な指標であり, μ_v は $\mathbb{Q}_v$の加法群の Haar 測度である. 今,adele の指標$\psi = (\psi_v)_v \mathbb{Q}_{\mathbb{A}} \to \mathbb{C}^\times$が $\mathbb{Q}$ を零化するとし, $\mu = \bigotimes_v \mu_v$が玉河測度 ($\mu(\mathbb{Q}_{\mathbb{A}}/\mathbb{Q}) = 1$) として, ϵ-因子

$$\epsilon(M) = \prod_{v:\mathbb{Q}\text{ の素点}} \epsilon_v(M, \psi_v, \mu_v)$$

を定義する. 右辺は V_ℓが不分岐, $\mathrm{Ker}\ \psi_p = \mathbb{Z}_p$かつ$\mu_p(\mathbb{Z}_p) = 1$ となる素数 p については 1 であるから, 有限積である. さらに局所ϵ-因子の性質と, 最高次外巾 $\det M$が代

数的 Hecke 指標により定義されることから, 右辺はψのとり方,μ の分解のし方にはよらない.

Deligne は [D3] で今定義した$\epsilon(M)$ が関数等式の$\epsilon(M)$ と一致することを予想している. Mが上の意味で, 自己双対で重さ m とすると, $\epsilon(M) = \pm f(M)^{\frac{m+1}{2}}$ となることが局所ϵ-因子の性質からわかる. この報告では, この符号のことを Mの関数等式の符号と呼び,$w(M)$ と書くことにする. Mが直交のときは,$f(M)$ は平方数であり, $w(M)$ は代数的に定義されることが知られている [Se].

以上の準備の下に,

主定理. Mを上で定義した意味での（ $\mathbb{Q}$ 上の $\mathbb{Q}$-係数の）直交 *motive* とし, その重さ m は偶数であるとする. さらに $F^{\frac{m}{2}+\frac{\ell-1}{2}}D = 0$ であると仮定する. このとき Mの関数等式の符号 $w(M)$ は正である.

$$w(M) = +1.$$

注意. 1. 上では簡単のため $\mathbb{Q}$ 上の $\mathbb{Q}$-係数の motive としたが, 一般の場合も同様である.

2. 仮定により, ℓ進表現 V_ℓは ℓで cristalline である.

すでに知られている場合をあげる.

(1) Artin motive. これは G_Kの有限商の直交表現の場合である. この場合は, はじめ Fröhlich-Queyrut[Fr-Q] が, 次いで Deligne[D2] が異なる証明を与えた. 上の定理は Deligne の証明の議論を使って証明される.

(2) 等標数の場合. 有限体 F上の曲線 Xの関数体 Kの絶対 Galois 群の直交表現 V の場合である. このときは etale cohomology $H^1(X_{\bar{F}}, j_*V)$ が非退化交代形式をもつことの帰結である. これは Serre[F-Q] による.

(3) modular 楕円曲線の 2 次対称積. Coates-Schmidt が具体的な計算により確かめた [C-Sc].

3. 証明. まず局所ϵ-因子の理論により, 局所符号 $w_p(M) = \pm 1$ が定義され, $w(M) = \prod_p w_p(M)$ となることがわかる.

3.1. ここでは局所符号 $w_p(M)$ を特性類 $sw_2(\rho_p) \in H^2(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}/2)$ と比較することにより, $p = \ell$についての p 進表現$\rho_p : G_{\mathbb{Q}_p} \to O(V_\ell)$ の第 2Stiefel-Whitney 類 $sw_2(\rho_p)$ の計算に帰着する. これは平方剰余の相互法則の帰結である.

$\mathbb{Q}$ の絶対 Galois 群 $G_\mathbb{Q}$ の直交 ℓ進表現 $V = V_\ell(\frac{m}{2})$ が定める準同型を$\rho : G_\mathbb{Q} \to O_{\mathbb{Q}_\ell}(V)$ とおく. Clifford 代数を使って定義される, 代数群 $O(V)$ の $\mathbb{Z}/2$ による中心拡大を$\tilde{O}(V)$ とする. $\tilde{O}(V)$ の連結成分は, 通常 $Spin(V)$ と書かれる指数 2 の開部分群である. Cを $\mathbb{Q}_\ell$の代数閉包の完備化とする. Cは閉体なので, 位相群の中心拡大

$$1 \to \mathbb{Z}/2 \to \tilde{O}(V_C) \to O(V_C) \to 1$$

がえられる. これを$\rho : G_\mathbb{Q} \to O(V) \to O(V_C)$ によってひきもどすことにより, $G_\mathbb{Q}$の $\mathbb{Z}/2$ による中心拡大がえられる. この中心拡大の類$\in H^2(G_\mathbb{Q}, \mathbb{Z}/2) = H^2(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}/2)$ を ρの第 2Stiefel-Whitney 類とよび, $sw_2(\rho)$ と書く. ここでは用いないが, ρの第 1Stiefel-Whitney 類は $\det \rho \in Hom(G_\mathbb{Q}, \mathbb{Z}/2) = H^1(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}/2)$ である.

一般に $s \in H^2(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}/2) = {}_2Br(\mathbb{Q})$ に対し, その $H^2(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}/2)$ $(p \leq \infty)$ での像を s_pと書く. さらに標準同型 $H^2(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}/2) = \{\pm 1\}$ により,$s_p = \pm 1$ と考える. 平方

剰余の相互法則により, $s \in H^2(\mathbb{Q},\mathbb{Z}/2)$ に対し, $\prod_p s_p = 1$ がなりたつ. 今これを $s = sw_2(\rho)$, $s_p = sw_2(\rho_p)$ に適用すると,

$$\prod_p sw_2(\rho_p) = 1$$

がえられる. したがって定理 $\prod_p w_p(M) = 1$ は次の等式

$$w_p(M) = \begin{cases} sw_2(\rho_p) & p \neq \ell, \infty \\ sw_2(\rho_\infty) \cdot (-1)^{h(M)} & p = \infty \\ sw_2(\rho_\ell) \cdot (-1)^{h(M)} = 1 & p = \ell \end{cases}$$

に帰着される. ここで

$$h(M) = \sum_{q \equiv \frac{m}{2}+1 \bmod 2, > \frac{m}{2}} (q - \frac{m}{2}) \dim Gr^q_{\mathbb{Q}} D$$

$Gr^q D = F^q D / F^{q+1} D$ である.

このうち $p \neq \ell, \infty$ については Deligne の定理 [D2] である. また $p = \infty$ は Hodge 構造のϵ-因子の公式から簡単にわかる. そのとき複素共役の固有多項式の一致 (5) を使う. 最後に $p = \ell$については, $w_\ell(M) = 1$ は, V_pが cristalline でそれが定める Weil-Deligne 群の表現が不分岐であることの帰結である. 結局 $w(M) = 1$ は

$$sw_2(\rho_\ell) = (-1)^{h(M)}$$

に帰着された.

3.2. Fröhlich の定理 [Fr] を p 進 Hodge-Tate 表現に対して拡張することにより, Stiefel-Whitney 類を Hasse-Witt 類と spinor 類で表す. ここでは $G_{\mathbb{Q}_\ell}$ の ℓ進表現 V が Hodge-Tate 型であることだけを使う. これはそれが cristalline であることから従う.

標数が 2 でない体 K 上の非退化 2 次形式 q 付き線形空間 D に対し, その Hasse-Witt 類 $hw_i(D), i = 1, 2$ を次のように定める. 第 1Hasse-Witt 類 $hw_1(D) \in K^\times / K^{\times 2} = H^1(K, \mathbb{Z}/2)$ は Dの判別式である. 第 2Hasse-Witt 類 $hw_2(D) \in H^2(K, \mathbb{Z}/2)$ は Dの直交基底 (e_i) をとって, $\sum_{i<j} \{a_i, a_j\}$ と定義する. ここで $a_i = q(e_i)$ で $\{a_i, a_j\}$ は a_i, a_jの $K^\times / K^{\times 2} = H^1(K, \mathbb{Z}/2)$ での類の cup 積である. 非退化 2 次形式付き線形空間 V がもう 1 つ与えられたとき, 仮想 Hasse-Witt 類を

$$hw_2(V - D) = hw_2(V) + (hw_1(V) - hw_1(D)) \cup hw_1(D) + hw_2(D)$$

と定義する.

絶対 Galois 群 G_Kの K-線形空間 V上の連続直交表現$\rho : G_K \to O(V)$ に対しその spinor 類 $sp(\rho)$ は次のように定義される. 中心拡大

$$1 \to \mathbb{Z}/2 \to \tilde{O}(V_C) \to O(V_C) \to 1$$

の境界射として, spinor norm$sp : O(V) \to H^1(K, \mathbb{Z}/2) = K^\times / K^{\times 2}$ が定義される. これによりρは準同型 $G_K \to H^1(K, \mathbb{Z}/2)$ を誘導し, したがって $Hom(G_K, H^1(K, \mathbb{Z}/2)) = (H^1(K, \mathbb{Z}/2))^{\otimes 2}$ の元を定める. これの cup 積による $H^2(K, \mathbb{Z}/2)$ での像をρの spinor 類とよび, $sp(\rho)$ と書く.

以上の定義の下,Fröhlich の定理の Hodge-Tate 版は次のとおりである.

定理. Kを完備離散付値体で標数は0 剰余体は標数 $p>0$ の完全体とし, Cをその代数閉包の完備化とする. ρを G_Kの $\mathbb{Q}_p$-線形空間 V上の直交表現とする. Dを2次形式付き K-線形空間で減少 *filtration* Fで $(F^q)^\perp = F^{-q+1}$ を満たすものが与えられているとする. C-線形空間の G_K-作用と2次形式を保つ同型

$$V\otimes C \to \bigoplus_q Gr_F^q(D)\otimes C(-q)$$

が存在すれば,

$$sw_2(V) = hw_2(V\otimes K - D) + sp(\rho).$$

Fröhlich のもとの定理 [Fr] は, ρが $O(V)$ の離散位相に関して連続な場合である.
定理の証明の概略は次のとおりである. まず cocycle を使った計算により, 差 $sw_2(V)-sp(\rho)$ は中心拡大

$$1\to \mathbb{Z}/2 \to \tilde{O}(V_C) \to O(V_C) \to 1$$

の境界射によるρの類 $\in H^1(K,\mathbb{Z}/2)$ の像であることをみる. 連続 cohomology については [T] 参照. ここで G_Kの $O(V_C)$ への作用は自然な作用とする. そこでρをその類の中でうまくとりかえることにより, $\dim V=1$ あるいは2の非常に簡単な場合に帰着する. そしてその場合には具体的な計算で確かめることができる. このようにして証明が完結する. この議論はもとの Fröhlich の定理の簡単な別証も与えている.

3.3. Fontaine-Lafaille 理論を使って, 第2段の $hw_2(V-D)$,$sp(\rho)$ を計算し $sw_2(V) = (-1)^{h(M)}$ を示す. ここでは Vが cristalline であることが最大限に使われる.

Fontaine-Lafaille 理論を極く簡単に復習する [Fo-L]. Kを p が素元である完備離散付値体とし剰余体 kが完全であるとする. Fontaine-Lafaille 理論とは, Kの絶対 Galois 群 G_Kの cristalline 表現と filtration と frobenius をもつ K-線形空間でよい性質をもつものはほぼ同値な概念であり, さらにこの対応は $\mathbb{Z}_p$-表現と O_K-加群についてもなりたつというものである. G_Kの $\mathbb{Q}_p$表現 Vの圏と filtration と frobenius をもつ K-線形空間 Dの圏との間には,

$$V\mapsto D(V) = (B_{cris}\otimes V)^{G_K}$$
$$D\mapsto V(D) = (F^0(B_{cris}\otimes V))^{f=1}$$

により関手が定義される. $\dim_{\mathbb{Q}_p}(V) = \dim_K(D(V))$のとき Vを cristalline, $\dim_K D = \dim_{\mathbb{Q}_p}(V(D))$ のとき Dを admissible という. $a,b\in\mathbb{Z}$ を $0\le b-a<p-1$ を満たす整数とする. 上の関手を $F^aD=D, F^bD=0$ かつ admissible な Dのなす部分圏に制限したものは充満忠実である.

さらに強く O_K-加群に対しても次がなりたつ. Δを有限型 O_K-加群で filtration と frobenius を持つものとする. これらがある条件件を満たすとき, Δは強可除であるという. 上のような整数の組 a,b を固定し,$F^a\Delta=\Delta, F^b\Delta=0$ を満たす強可除な O_K-加群Δを考える. このようなものに対し, G_Kの $\mathbb{Z}_p$-表現 $V(\Delta)$ が定義される. $0\le a\le b\le p-1$ のときには, Fontaine の環 A_{cris}を使って, $V(\Delta) = (F^0(A_{cris}\otimes\Delta))^{f=1}$ とおく. 一般の場合は,Tate twist をとって定義する. すると関手 Vは充満忠実になる. Dが admissible かつ上のような整数の組 a,b に対し $F^aD=D, F^bD=0$ となるならば, Dの強可除な格子Δが存在し, さらに $V(D)=V(\Delta)\otimes\mathbb{Q}_p$となる.

さらに剰余体 kが代数閉であるとする．単純な強可除 k-線形空間と惰性群 $I = G_K$ の既約 $\mathbb{F}_p$-表現との対応は次のような性質を持つ．Pを Iの最大 pro-p 部分群とすると，$I/P = \operatorname{proj\,lim}_{p\nmid n} \mu_n(k)$ であるから G_Kの h 次既約 $\mathbb{F}_p$- 表現は I/Pの $\mathbb{F}_p^\times$への指標χで像が $\mathbb{F}_{p^h}$ の真の部分体にはいらないものである．体のうめこみ $\mathbb{F}_{p^h} \subset k$ をとりχ_hを $I/P \to \mu_{p^h-1}(k) = \mathbb{F}_{p^h}$ とする.$chi = \chi_h^i$, $i = i_0 + i_1 p + \cdots + i_{h-1}p^{h-1}$ とおいたとき，像が真の部分体にはいらないとは，関数 $j \mapsto i_j$の周期がちょうど h となることである．このとき対応する強可除 k-線形空間$\Delta = \Delta(h,i)$ は h 次元で $\dim_k Gr_F^q \Delta = \mathrm{Card}\ \{j; i_j = q\}$ を満たす．

主定理の証明にもどる．仮定により Dは $a = -\frac{p-3}{2}, b = \frac{p-1}{2}$ に対し条件 $F^a D = D, F^b D = 0$ を満たす．Δを Dの強可除 O_K格子とし，$T = V(\Delta)$ を対応する G_K-安定な Vの $\mathbb{Z}_p$-格子とする．今簡単のためΔが非退化 O_K格子，すなわち Dの 2 次形式のΔへの制限は O_K-値で，判別式が単数であるとする．一般の場合には少し複雑だが本質的な違いはない．このとき Tも非退化 $\mathbb{Z}_p$格子になる．Δ, Tの直交基底をとることにより，$hw_2(V - D) = 0$ となることがわかる．したがって $sp(\rho) = (-1)^{h(M)}$ を示せば証明が完結する．

$\bar{V} = T \otimes \mathbb{F}_p$とおく．可換図式

$$\begin{tikzcd}
 & G_k \arrow[d, "\rho"'] & \\
O(\bar{V}) \arrow[d, "sp"'] & O(T) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "sp"'] & O(V) \arrow[d, "sp"] \\
\mathbb{F}_p^\times/\mathbb{F}_p^{\times 2} & \mathbb{Z}_p^\times/\mathbb{Z}_p^{\times 2} \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r] & \mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Q}_p^{\times 2}
\end{tikzcd}$$

により，$sp \circ \rho : G_{\mathbb{Q}_p} \to \mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Q}_p^{\times 2}$ の像は $\mathbb{F}_p^\times/\mathbb{F}_p^{\times 2}$ にはいる．よって $sp(\rho)$ は $sp \circ \rho$ の惰性群への制限が自明であるかそうでないかに応じて，1 あるいは-1 になる．$I/P = \operatorname{proj\,lim}_{p\nmid n} \mu_n(k)$ により $Hom(I, \mathbb{F}_p^\times/\mathbb{F}_p^{\times 2})$ は p-円分指標$\theta_p : I/P \to \mu_p = \mathbb{F}_p^\times$ の類により生成される．そこで $sp \circ \rho|_I = \theta_p^{h(M)}$ を示せばよい．

これの証明の詳細は略すが，要点は次の 2 つである．

(1) 単純強可除 k-線形空間で自己双対であるものの分類．これは上で与えた記述により容易になされる．ここで重要なことは，仮定 $F^{\frac{p-1}{2}} D = 0$ により，$\Delta(1, \frac{p-1}{2})$ が排除されることである．

(2) $\bar{\rho} : G_K \to O(\bar{V})$ の半単純化$\bar{\rho}^{ss}$と spinor norm の合成 $sp \circ \bar{\rho}^{ss}$ の計算．これも上の対応と,(1) で分類した個々の場合の具体的な計算により実行される．

以上のようにして主定理の証明がなされる．

省略の多い報告となったことをお詫びします．詳細については [Sa] をみて下さい．

References

[C-Sc] J.Coates-C.-G.Schmidt, *Iwasawa theory for symmetric square of an elliptic curve*, J. reine angew. Math. **375/376** (1987), 104-156.

[D1] P. Deligne, *Les constantes des équations fonctionelles des fonctions L*, Modular functions of one variable II Lecture Notes in Math. 349 (1973), Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 501-597,.

[D2] ———, *Les constantes locales de l'équation fonctionelle de la fonction L d'Artin d'une représentation orthogonale*, Inventiones Math. **35** (1976), 299-316.

[D3] ——, *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales*, Proceedings of Symp. in Pure Math. **33 part 2** (1979), AMS, Providence, 313-346.

[Fo] J.-M. Fontaine, Astérisque (1994), SMF, Paris.

[Fo-L] J.-M.Fontaine-G.Laffaille, *Construction de représentation p-adiques*, Ann. Scient. École Norm. Sup. 4e série, **15** (1982), 547-608.

[Fo-M] J.-M. Fontaine-W.Messing, *p-adic periods and p-adic etale cohomology,*, Contemporary Math. vol 67 (1987), 179-207.

[Fr] A.Fröhlich, *Orthogonal representations of Galois groups, Stiefel-Whitney classes and Hasse Witt invariants*, J. reine angew. Math. **360** (1985), 84-123.

[Fr-Q] A.Fröhlich-J.Queyrut, *On the functional equation of the Artin L-function for charcters of real representations*, Inventiones Math. **20** (1973), 125-138.

[Sa] T.Saito, *The sign of the functional equation of the L-function of an orthogonal motive*, Inventiones Math. (1995).

[Se] J.-P. Serre, *Conducteurs d'Artin des caracteres réels*, Inventiones Math. **14** (1971), 173-183.

[T] J. Tate, *Relations between K_2 and Galois cohomology*, Inventiones Math. **36** (1976), 257-274.